



Antoine Laurent de Lavoisier  
TRATADO ELEMENTAL DE QUIMICA  
Prólogo, traducción y notas de  
Ramón Gago Bohórquez

Sir Isaac Newton  
OPTICA  
Introducción, traducción, notas e  
índice analítico de  
Carlos Solís

Blaise Pascal  
OBRAS.  
Pensamientos, Provinciales, Escritos  
científicos, Opúsculos y Cartas  
Prólogo de José Luis Aranguren  
Traducción de Carlos R. de Dampierre

René Descartes  
MEDITACIONES METAFISICAS CON  
OBJECIONES Y RESPUESTAS  
Introducción, traducción y notas de  
Vidal Peña

DISCURSO DEL METODO, DIOPTRICA,  
METEOROS Y GEOMETRIA  
Prólogo, traducción y notas de  
Guillermo Quintás Alonso

Immanuel Kant  
CRITICA DE LA RAZON PURA  
Prólogo, traducción y notas de  
Pedro Ribas

## LEONARDO DA VINCI Y LA FLEXIÓN DE VIGAS

Jaime Cervera  
Universidad Politécnica de Madrid

Es objeto de este artículo presentar los conocimientos de que hace gala Leonardo da Vinci en el campo concreto de la resistencia de materiales. Aunque es conocido su papel precursor en muchos terrenos, no sucede aquí lo mismo, o al menos no se conocen suficientemente sus logros en campos como la flexión de vigas, en gran medida por la escasa labor realizada con esta perspectiva sobre sus manuscritos de Madrid, donde se halla probablemente la parte más interesante de sus ideas y experiencias. En este artículo se cubre parcialmente dicha laguna.

Leonardo ocupa una excepcional posición: en él se anuda la ciencia de su época; constituye un punto de convergencia de todo el saber como resultado de su avidez informativa y especulativa<sup>1</sup>: escribe de aritmética y geometría, de pintura y perspectiva, arquitectura, estática y mecánica, de guerra, fortificaciones, venenos; del vuelo de pájaros y hombres, de la natación, del movimiento de las aguas y la caída de los graves, de medicina, anatomía, óptica, astronomía... En el campo de la Ciencia y la Técnica de la Construcción habla de resistencia de

<sup>1</sup> Ver Pierre Duhem 1906. En dicha obra el autor demuestra el conocimiento por Leonardo de los autores que le precedieron, pero asimismo muestra cómo los textos elaborados por éste fueron ampliamente difundidos: aparte de la difusión de sus manuscritos a su muerte, había medios más sencillos de acceso a su pensamiento: en la p. 224 del citado texto se lee: «Para informarse de las invenciones de Vinci los hombres del s. XVI tenían en bastante caso documentos de uso más fácil. Existían cuadernos donde se encontraban reunidos todos los pensamientos del gran pintor que trataban de un mismo tema, transcritos en forma legible, y ordenados provisionalmente. No se podría dudar que haya sido el mismo Leonardo quien compusiera tales colecciones, que llamaba Tratados: en cada instante sus notas remiten a una proposición del «Tratado del peso», «Tratado del agua», «Tratado del movimiento local»; esta proposición se designa por el número que marca su lugar en el tratado. Las mismas discordancias y las alteraciones que a veces pueden encontrarse en estas numeraciones muestran que Leonardo retocaba a menudo estos esbozos de Tratados, que modificaba el orden de las proposiciones ya existentes, o que intercalaba proposiciones nuevas.

Francisco de Melzi hizo sacar copia de las colecciones de sus pensamientos».

ménsulas y vigas, de arcos y cimentaciones, soportes, deformación,... y en todos los casos propone experiencias y modelos mentales con los que abordar la descripción de los fenómenos que observa<sup>2</sup>.

Su poderosa originalidad le hace abordar de forma nueva problemas anteriores, ampliando el campo de los interrogantes a la vez que aporta soluciones originales a gran número de ellos. Y sin embargo no es fácil aceptar que una sola inteligencia haya planteado en su totalidad todo un conjunto de hechos que van a constituir el marco de toda una rama del hacer científico y técnico<sup>3</sup>: por ello intriga la escasez de referencias anteriores a Leonardo sobre el amplio cúmulo de problemas de resistencia que aborda.

Hemos mencionado el conocimiento que tenía Leonardo de sus predecesores, de su manejo de las herramientas matemáticas (aritmética y geometría), y más tarde hablaremos de su papel en el desarrollo teórico de su época. Aquí queremos hacer mención de su aportación más sistemática, de su papel como hombre puramente renacentista en la renovación de la ciencia y en su aplicación a la producción artesanal: No interesan tanto sus desarrollos de ingenios mecánicos de todo tipo, o su interés práctico, sino esencialmente lo que su figura nos muestra sobre el tránsito a una nueva era del conocimiento, a una nueva forma de explorar y ver el mundo<sup>4</sup>.

Aunque el corte entre eras no puede marcarse en una personalidad, por grandiosa que sea, Leonardo es el paradigma del cambio de perspectiva que se inaugura en el Renacimiento, y que, como bien describió Foucault, hace virar el interés intelectual por la revelación del trasfondo común a todas las cosas que había presidido la exploración filosófica del mundo antiguo, a la búsqueda de la reconstrucción del orden no inmediato de las cosas y que hace inteligible la diversidad al disponerla en un abanico continuo, como se hallan dispuestos inicialmente en la paleta del pintor los colores que en el cuadro se muestran en su diversidad absoluta. Los filósofos no buscarán ya el trasfondo común a todas las cosas (que los antiguos habían despachado con el concepto de sustancia), sino que tratarán de describir ordenadamente la diversidad: los manuscritos de Leonardo son una maravillosa muestra del asombro de un hombre deslumbrado ante el nuevo mundo que se despliega ante sus ojos, una muestra del intento general de replantear todas las preguntas que, una tras otra, y como por destellos, se presentan ante su mente, y del intento de dar respuesta inmediata a todas ellas. Así en un mismo folio coexisten temas radicalmente distintos, salta de una cuestión a otra dejando espacios en blanco al objeto de volver algún día sobre la cuestión original, espacios que luego llena con nuevas preguntas y respuestas. Sus escritos son un bullir

<sup>2</sup> En el M. A. de la Biblioteca del Instituto f. 33 *recto* se lee: «Recordar hacer esta experiencia: experimenta si una pequeña pieza de madera suspendida entre sus extremidades en dos apoyos soporta 10 libras, qué soportará una viga de iguales proporciones. Asegurarse si la regla de tres es aplicable, pues la experiencia hace buena regla».

<sup>3</sup> P. Duhem 1905, Conclusión: «Ninguna inteligencia humana, cualquiera que sea su potencia y su originalidad podría producir en todas sus piezas una doctrina absolutamente nueva».

<sup>4</sup> En la perspectiva enunciada por M. Foucault en *Las palabras y las cosas* (París, Gallimard, 1966).

de temas, imágenes, sugerencias, ideas inacabadas sobre las que volver, preguntas con respuestas apenas esbozadas,... Cuando puede concentrarse sobre algún tema y llegar a una gran claridad sobre el mismo lo abarcará desde diversas posiciones, desde diversos puntos de vista, como el escultor que se recrea observando su obra, rodeándola, fijándose aquí y allá. Pero además aprovecha para verter apuntes desconcertantes, o preguntas nuevas, como si esbozase en papeles sueltos las nuevas imágenes que la observación de su obra le sugiere, y que anota para tallarlas más tarde.

Leonardo intentará siempre plantear las preguntas en la forma que se le aparece más exenta de ambigüedad, en la forma más comunicable. De ahí que utilice el lenguaje matemático (Aritmética y Geometría). Plantea los problemas en forma tal que las soluciones puedan ser expresadas por la vía de la geometría.

## Los conocimientos mecánicos de Leonardo

La base de las concepciones estáticas y mecánicas de Leonardo se halla en las leyes de la palanca, y en particular en una versión del axioma de Jordano Nemorario<sup>5</sup>. Para Leonardo la *fuerza* es una causa en el sentido de Aristóteles, es el origen de algo que puede medirse por su efecto (por su *potencia*) y este efecto se rige por las leyes derivadas de la palanca. Merece la pena reproducir las palabras de Leonardo:

«Digo que la fuerza es una virtud espiritual, una potencia invisible, y es quien, por medio de una violencia accidental exterior, es causada por el movimiento, introducida e infundida en los cuerpos que se encuentran extraídos y desviados de su hábito natural; les da una vida activa de una potencia maravillosa, obliga a todas las cosas creadas a cambiar de forma y lugar, corre con furia a su muerte deseada, y va diversificándose según las causas. La lentitud la hace más grande, y la velocidad la debilita; nace por violencia, y muere por libertad, y mientras

<sup>5</sup> Gracias a P. Duhem 1905 sabemos hoy que los al menos tres tratados atribuidos a Jordano Nemorario desde el S. XIII corresponden a manos diferentes. Probablemente como introducción del libro *De Canonio* (Bibl. Nat. París, fonds latins, Ms 7378A), Jordano escribió el *Elementa Jordani super demonstrationem Ponderis* (\*), tal vez hacia finales del S. XII o en el S. XIII. Los copistas asociarán ambos textos bajo el nombre *Liber Euclidis de ponderibus* (\*\*), o el nombre *Jordanus de Nemore et Euclides de Ponderibus*. Es dicha transformación la que se publica en Nuremberg, Peter Apian 1533, bajo el nombre *Liber Jordani Nemorarii viri clarissimi de ponderibus*, texto que añade un comentario que suscitó el texto primitivo, comentario al que P. Duhem llama «Comentario Peripatético (\*\*\*)»; existe finalmente una obra posterior: *Liber Jordani de Ratione Ponderis* (\*\*\*\*) del S. XIII que, juntamente con el comentario peripatético constituirán la base de la edición de Curtio Troyano 1565 de título *Jordani Opusculum de Ponderositate*, gracias a un manuscrito que le transmitió Tartaglia.

\* B.N. París, fonds latins Ms 10252 de 1464; copia en B. Mazarina, París, MS 3642 fechada en el S. XIII

\*\* B.N.P. f.l. MS 7310 y 10260

\*\*\* B.N.P. f.l. MS 7378 A

\*\*\*\* B.N.P. f.l. MS 8680 A

Ver Cervera 1982. pg. 15 ss.

mayor es, más deprisa se consume. Expulsa con furia lo que se opone a su destrucción, desea vencer y matar la causa de lo que le obstaculiza, y muere, y vendiendo se mata a sí misma. Se hace más poderosa encontrando mayores obstáculos. Toda cosa huye gustosa de su muerte. Toda cosa constreñida constriñe. Nada se mueve sin ella. El cuerpo donde nace no crece ni en peso ni en forma. Ella misma crece en las fatigas, y desaparece en el reposo. El cuerpo al que es impuesta no tiene ya libertad, y a menudo engendra, por sí misma, a través del movimiento, una nueva fuerza» [(Mss A Biblioteca del Instituto de Francia, f. 34 verso)].

Y en el Manuscrito de Madrid (folio 51, verso) leemos:

«La fuerza puede ser primaria y derivada (...) La fuerza derivada es la que se genera en el movimiento de la ya mencionada primaria, al tiempo que nace la primaria. La derivada nunca puede superar a la primaria, pero sí puede llegar a ser igual que ella. Pero podrá alcanzar mayor potencia cuando, con el mismo movimiento de la primaria, la derivada se mantenga más tiempo. De manera que existirá la misma proporción entre la *Potencia* de la fuerza derivada y la de su primaria que entre los tiempos en que la primaria genera a la derivada. Esto es, que si la fuerza primaria nace en un grado de tiempo, y necesita dos grados de tiempo para completar la derivada, la fuerza derivada completará en potencia a la primaria, y así sucesivamente la derivada crecerá a una con el tiempo requerido para que la primaria la genere».

Un poco más adelante se lee:

«Cuando la fuerza primaria tenga el mismo movimiento que la derivada también sus potencias serán iguales. Pero si el movimiento de la primaria es menor que el de la derivada sus fuerzas estarán en las mismas proporciones en que estaban las longitudes de sus movimientos» (Se entiende: inversamente proporcionales a las longitudes de sus propios movimientos o directamente proporcionales a las longitudes de sus movimientos inversos).

Y en f. 52 verso, definitivamente:

«La potencia de la fuerza derivada estará en la misma proporción con la potencia de la fuerza primaria, como el movimiento de la fuerza primaria al de la fuerza derivada».

Se trata, pues de una formulación del axioma en los términos del *Liber Jordanis de ratione ponderis*.

Del mismo modo, Leonardo conoce implícitamente la noción de momento en forma parecida a la que usa el autor del *De ratione ponderis*:

«Tal es la proporción que tiene la longitud mn con la longitud nb, tal es la del peso que descende en d con el mismo peso en la posición b» (Fig. 1) (Ms E f. 72 Instituto de Francia).

Sin embargo no se trata aún de nuestra noción de momento, sino de una noción que para el equilibrio en torno a un punto de apoyo expresa la igualdad de efecto resultante de pesos inversamente proporcionales a los brazos con los que actúan, entendiendo como brazos la distancia trazada perpendicularmente a la

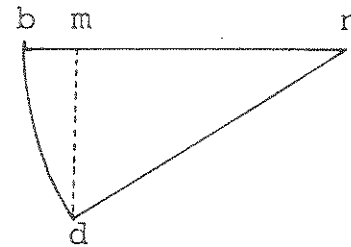


Figura 1

recta que expresa la dirección de la fuerza. Leonardo expresa ese principio al descomponer fuerzas mediante cuerdas cargadas: (Fig. 2) «A es el polo de la palanca angular AD y AF, y sus apéndices son DN y FC» y sigue: «mientras más se aumenta el ángulo de la cuerda que, en el centro de su longitud sostiene al peso N, más disminuye su palanca potencial, y crece la contrapalanca que sostiene al peso». Mediante esta noción, Leonardo puede considerar temas más complejos (Fig. 3).

También sabe Leonardo abordar el plano inclinado (Fig. 4) aunque existen de su mano textos contradictorios: «El cuerpo esférico y pesante toma un movimiento tanto más rápido cuanto más lejos de la perpendicular está su contacto con el lugar donde se mueve». E inmediatamente: «Cuanto menor sea ab que ac tanto más lentamente caerá la esfera por ac...» Sin embargo más importante es el nuevo punto de vista que plantea: «cuando el grave descende, divide su peso en dos aspectos diferentes, según la línea bc, y según la línea nm» (Fig. 5).

Vemos, pues, que Leonardo llega a tener en la mente las nociones mecánicas desarrolladas en su época, pero además va a intentar aplicarlas, como veremos

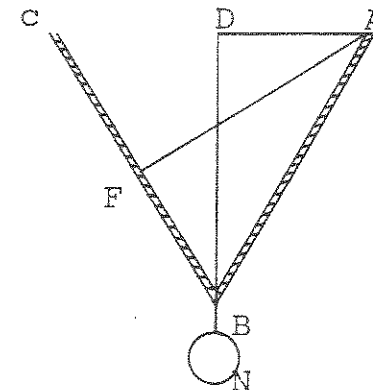


Figura 2

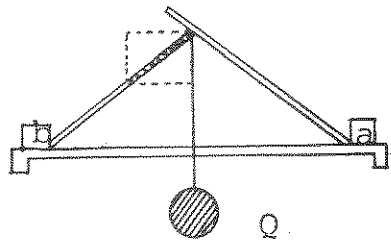


Figura 3

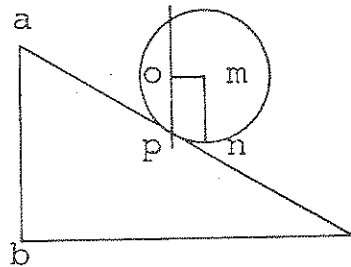


Figura 4

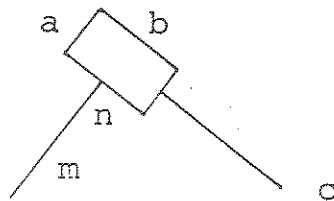


Figura 5

a continuación, para un conjunto de problemas que aparecen tratados por primera vez en sus manuscritos, problemas en los que utilizará nociones tan importantes como las de descomposición de fuerzas, o los trabajos.

### La resistencia de materiales y el cálculo de estructuras de Da Vinci

Leonardo estudió buena parte de los problemas que hoy se engloban en la ciencia de la resistencia de los materiales y en el cálculo de estructuras.

Hay anotaciones y experimentos sobre resistencia en tracción, sobre resistencia de ménsulas, sobre resistencia y deformación de flexión, sobre empujes de arcos (considera su comportamiento en posición colgada análogo al correspondiente en posición normal), sobre diseño y proporciones de vigas, sobre compresión y lo que hoy denominamos pandeo, sobre resistencia del suelo, incluyendo en general exposición teórica y experimento.

Leonardo estudió la resistencia de los cuerpos sometidos a fuerzas en las dos formas de resistencia que, más tarde, distingue Galileo: frente a fuerzas longitudinales, y frente a fuerzas transversales.

En los manuscritos de la Biblioteca del Instituto de Francia se encuentra un dibujo (Fig. 6), con una nota titulada: «Ensayando la resistencia de alambres de

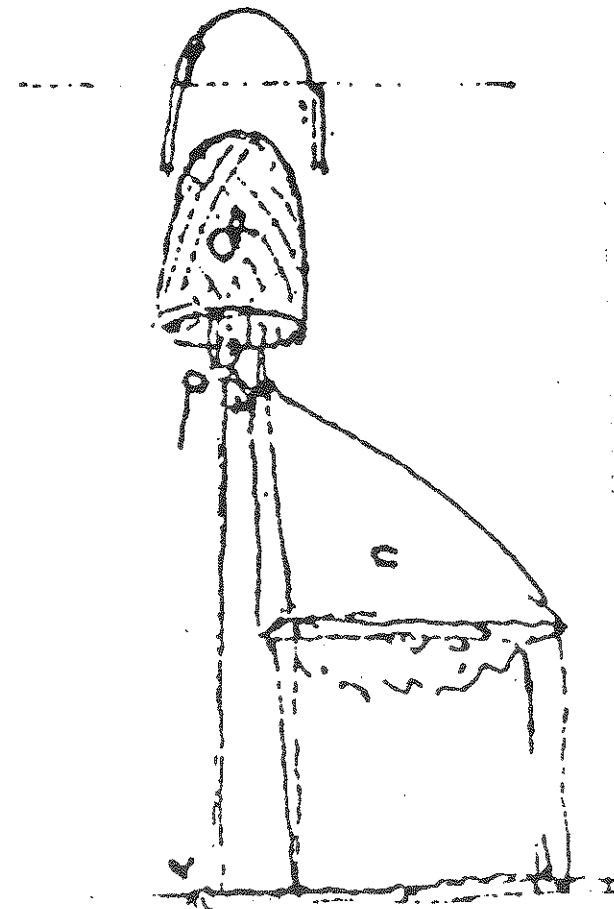


Figura 6

acero de varias longitudes», donde, tras la descripción del dispositivo experimental, puede leerse: «Debes anotar el peso de arena y la posición de la fractura del alambre. El ensayo se repetirá varias veces para comprobar el resultado. Después ensaya un alambre de longitud mitad de la del anterior y anota el peso adicional que soporta; después un alambre cuya longitud sea la cuarta parte, y así sucesivamente, anotando cada vez la resistencia última y la posición de la fractura».

Entre los problemas que aborda podemos citar dos de importancia clave: La resistencia de los arcos, y la resistencia de piezas a compresión. El análisis que hace de la resistencia y empuje de los arcos, así como la metodología experimental que plantea para su investigación merece de por sí un artículo propio, por lo que baste citar por el momento la afirmación del f. 50 r. Ms A Bibl. Inst., remitiéndose al lector que desee más información a los manuscritos mismos, al texto de Carlo Zamattio en *Leonardo Scienciatto* o a mi Tesis doctoral inédita.

En el texto citado Leonardo demuestra identificar al empuje como base de la resistencia del arco: «El arco no es más que una fuerza causada por dos debilidades: en efecto, el arco en los edificios está compuesto por dos cuartos de círculo, y cada uno de los dos cuartos de círculo, débil por sí mismo, desea caer, pero oponiéndose cada uno a la ruina del otro, las dos debilidades se transforman en una sola fuerza... los dos cuartos se empujan mutuamente...».

Sin embargo merece la pena comentar que, aun cuando de sus manuscritos se deduce que comprende la existencia de distribuciones variables en las sollicitaciones por sección o pieza, no parece que su idea coincida con lo que hoy conocemos. En efecto, en el Códice de Madrid I. Se lee en el f. 2 v (Fig. 9):

«En cuerpos de una sola pieza, el empuje o compresión de una parte sobre otra parte tiene la misma proporción que la que tiene el todo con el todo.

El peso  $a b$  y del mismo modo el  $c d$  gravan sobre  $e g$  y sobre  $h k$ . Por eso el peso  $b c$  cae y grava a lo largo de su perpendicular en  $f g$  y en  $h i$ . Y como en esa parte la suma de 14 ladrillos sólo trabaja como si fueran 7, la parte más cercana al pilar es la que queda más debilitada, y por eso es allí donde, por fuerza, se produce la rotura, como se muestra en  $r i b$ ».

Y en el f. 113 v. se lee:

«La parte que más grava el peso desunido es la que se encuentra más cerca a su centro de gravedad.

Es manifiesto que la parte interna de un arco o de una cúpula recibe mayor empuje en los sitios  $b c$  que en los de afuera en  $a d$ . (Fig. 10)».

Respecto del problema hoy denominado de pandeo, en el códice de Madrid se lee (Ms. I f. 177 v): (Fig. 11) «El soporte del peso forzosamente se dobla o se comprime en aquella parte que se encuentra debajo del peso que lo oprime. Y sea cual sea la posición en que esté colocado el centro del peso sobre el soporte, éste siempre se doblará de modo que la mitad de su altura cerchará hacia adentro. Cualquier parte del soporte que se encuentre debajo del centro del soporte estará sujeta a esta torsión (*aquesta tortura*) salvo el centro del soporte. Cuando éste se encuentre debajo del centro del peso jamás será posible que el soporte se doble hacia ningún lado...» (Fig. 12) El mismo tema se trata en el Ms. A de la Biblioteca del Instituto (f 3 v., 45 v), pero en éste vuelve sobre ello desde un punto de vista definitivo: «Todo soporte hace tanta más resistencia al peso superpuesto cuanto sus partes estén más unidas y sean más sólidas. Y toda parte que se encuentre separada en toda la altura del soporte de un espesor uniforme se hace más débil de lo que era estando unida, tanto como su diámetro entre más veces en su altura que lo que lo hacía el diámetro de la suma entera del soporte unido». (f. 46 r.) (Fig. 13) De este modo las resistencias de cada parte son como la inversa de las esbelteces geométricas, lo que desarrolla seguidamente con ejemplos: Para Leonardo, como para nosotros, el problema depende simultáneamente del área y de la esbeltez de la pieza. Hoy sabemos que el problema es de gran complejidad, si bien las expresiones más sencillas que manejamos hacen intervenir el cuadrado de la esbeltez en el lugar en que Leonardo plantea su primera potencia. En todo caso se trata de un planteamiento que será totalmente desconocido, has-

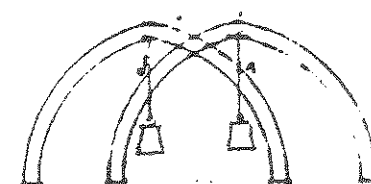
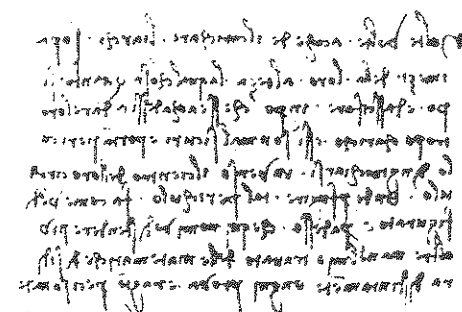
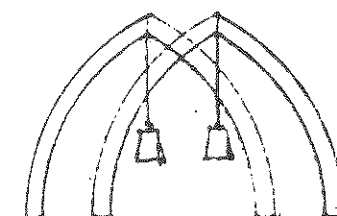
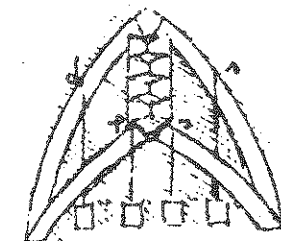
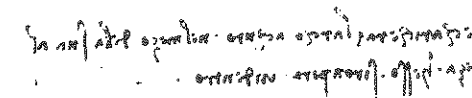
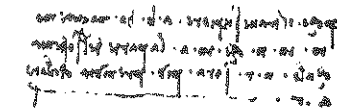
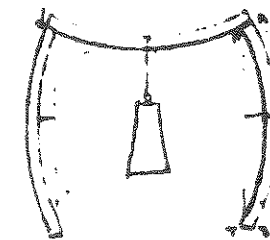
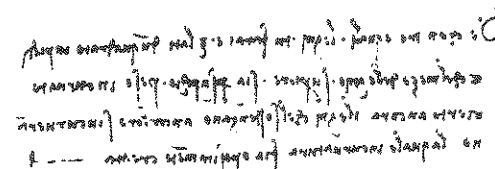
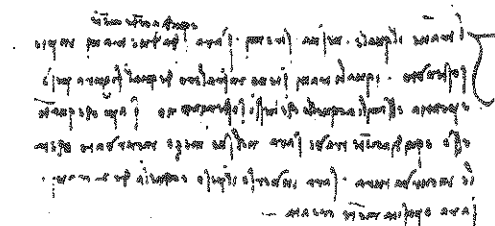


Figura 7

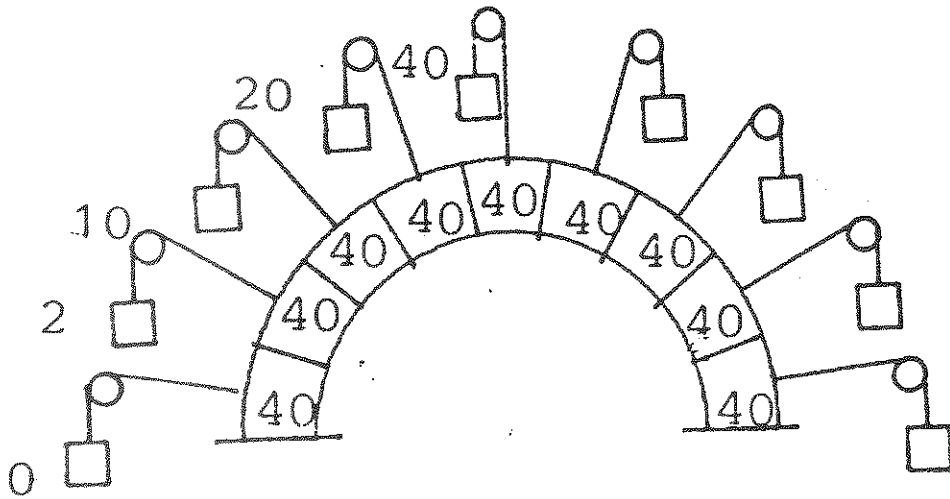


Figura 8

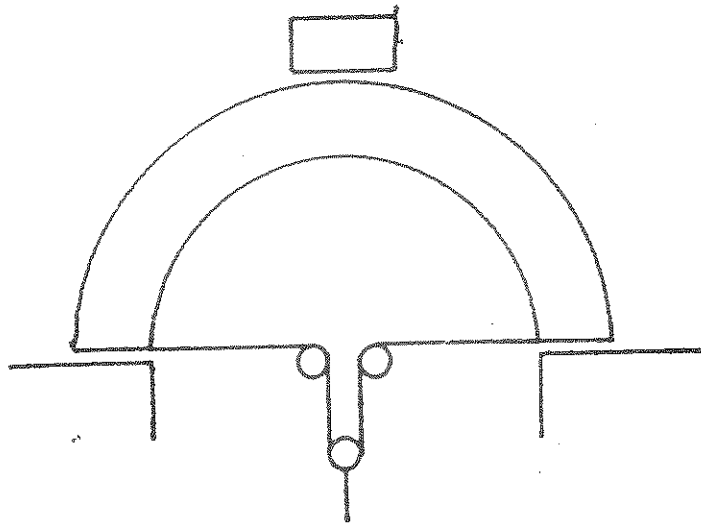


Figura 9

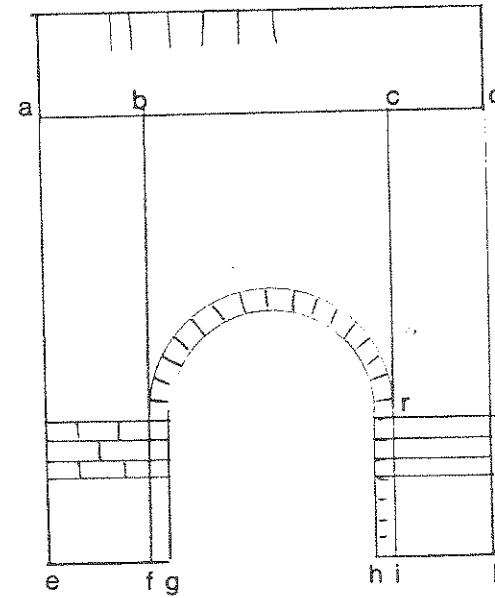


Figura 10

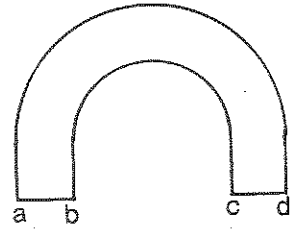
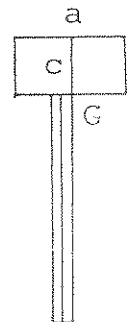
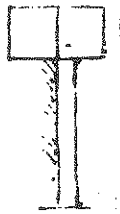


Figura 11



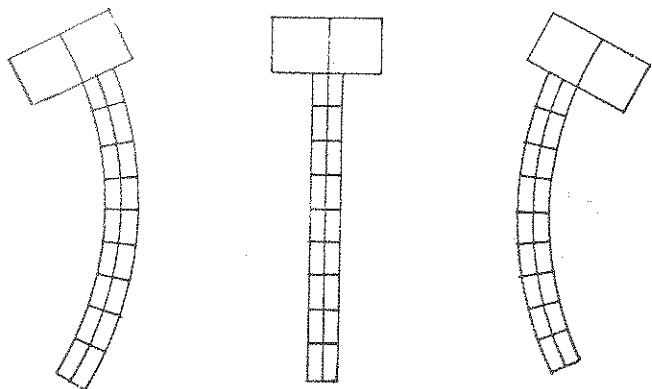


Figura 12

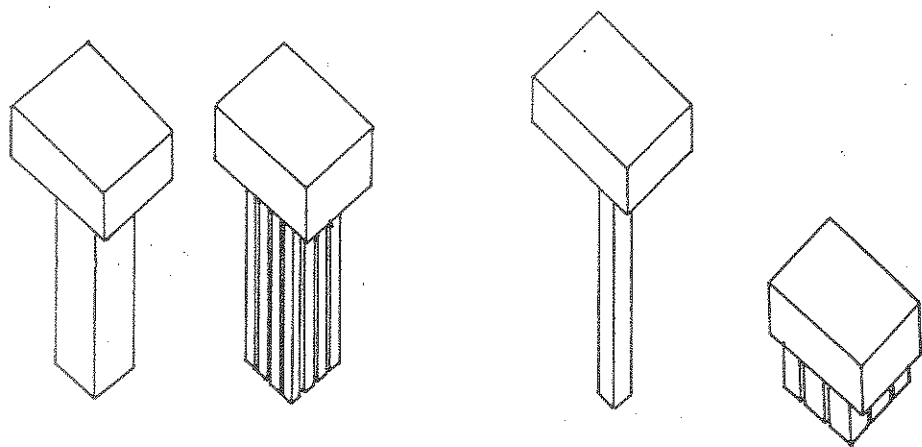


Figura 13

ta tal punto que en tratados clásicos de construcción del siglo XVII (Béldor 1729) se cita el problema como insoluble<sup>6</sup>.

### El problema de la flexión de vigas en Leonardo

Respecto a la resistencia en flexión, en el manuscrito A, f. 49 r. vemos acometer la cuestión correctamente a través del problema de la ménsula, que luego explotará Galileo con tanto éxito: (Fig. 14), «Si una barra de 2 brazas de larga carga 10 libras, una braza de bastón del mismo espesor cargará 200». (sic; es obvio que debe leerse 20 pese al error del texto, dado lo que sigue) «en efecto, tanto como el bastón corto entre en el largo, tantas veces sostendrá más peso que el largo».

Es suficientemente conocido cómo trata el problema de la resistencia de las vigas apoyadas, para las que llega a la conclusión de que su resistencia varía inversamente con su longitud, y directamente con el espesor. Hay que hacer notar que Leonardo consigue el espesor variable atando en haces parejas o grupos de barras de sección (y espesor) unidad (Fig. 15) (f 135 r. Códice Atlántico), por lo que aunque el comportamiento según el «espesor» es equivalente al comportamiento según el ancho tal y como hoy lo vemos, no es sin embargo equivalente el concepto de «espesor» al de *ancho*, que para nosotros implica el radicalmente distinto de *canto*. Para Leonardo no existe esa diferencia radical en su tratamiento del problema, por más que sea consciente del diferente papel de ambas dimensiones a la hora de dimensionar las vigas.

Es probablemente mucho menos conocido cómo plantea el problema de la deformación en vigas, problema que identifica con el de la deformación de las máquinas de guerra. (De ahí el clásico nombre de flecha, o de *sagitta* en Leonar-

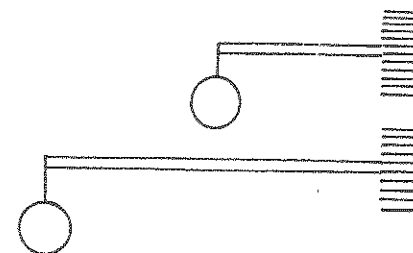


Figura 14

<sup>6</sup> «Se puede conocer bien lo que soporta una pieza horizontal y en distintas inclinaciones,... pero no es posible determinar lo que soportará estando vertical, el paso en esta posición es incalculable... No es que quiera decir que una pieza de madera de pie sea capaz de soportar un peso inmenso: sé bien que cuando tenga una cierta altura podrá doblarse, e incluso romperse. Pero cuando esto ocurra no es el efecto de ninguna causa susceptible de regla alguna...».

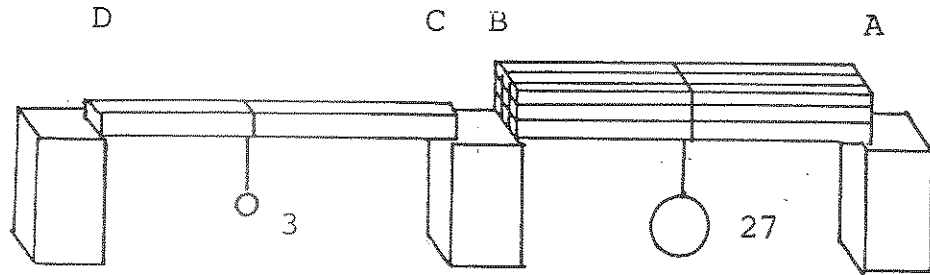


Figura 15

do, para la amplitud de la deformación). Y pese a que este problema ha sido pasado por alto por la mayor parte de los estudiosos de la historia del cálculo de estructuras, dicho problema es de gran importancia en Leonardo, y su tratamiento del mismo es extenso.

Ya hemos visto al citar la concepción de *forza* de Leonardo que existe una reciprocidad entre fuerzas («toda cosa constreñida constriñe»), de modo que las barras cargadas se deforman debido a esa carga, pero a su vez generan internamente una fuerza que es ciertamente la que sostiene la carga que actúa sobre ellas, y que es «... la fuerza que se crea en los cuerpos plegados y torcidos contra su naturaleza, como la ballesta u otras máquinas parecidas que no se dejan plegar voluntariamente, y que cuando están cargadas desean volver a levantarse, y expulsan con furor, tan pronto como les es dada la libertad de hacerlo, lo que se oponía a su carrera» (Ms A. Bibl. Inst. f. 34, v). Puesto que para Leonardo fuerza y deformación se encuentran ligadas («... obliga a todas las cosas creadas a cambiar de forma y lugar...») se aplica en analizar dicha ligazón.

En primer lugar trata de caracterizar la deformación de las vigas:

«Si un cuerpo tiene un grosor uniforme, la parte más alejada de los extremos se doblará con más facilidad que cualquier otra.

Si quieres doblar dos cosas de igual grosor ... doblarás la más larga con una fuerza menor que la más corta» (Ms A. Bibl. Inst. f. 33, r).

Y plantea el problema: «Recordar hacer esta experiencia: Experimenta si una pieza de madera delgada suspendida entre sus extremidades en dos apoyos soporta 10 libras, qué soportará una viga de iguales proporciones. Asegúrate si la regla de tres es aplicable, pues la experiencia hace buena regla». De este modo Leonardo liga implícitamente el problema de la resistencia con el problema de la flexión, de la deformación.

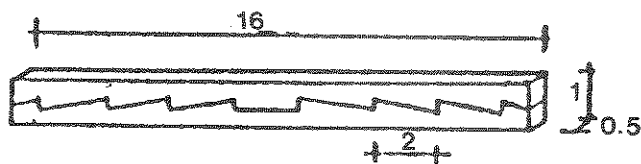


Figura 16

En los Manuscritos de la Biblioteca del Instituto sólo podemos ver una alusión más al tema (Ms M) alusión por la que vemos ha sido capaz de resolver el problema de la flecha para carga puntual en el centro (Fig. 17). En él se dice:

«Haz que las flechas sean iguales, y que los triángulos hechos por las cuerdas sean semejantes».

Los códices de Madrid contienen una solución por las vías teórica y experimental a los problemas de la deformación en piezas prismáticas apoyadas en los extremos y sometidas a diversas formas de carga vertical. Leonardo acomete el problema desde la perspectiva de la mecánica que conoce bien: las leyes de la palanca. Pero además, utilizará en su reflexión una aportación nueva, de importancia capital: Leonardo ha logrado concebir un modelo de la deformación local de las piezas en flexión que se adelanta en doscientos años a su replanteamiento por Hooke<sup>7</sup>, y a su utilización por Mariotte y Bernouilli: (Fig. 18) en el Códice 1, f. 84 v., y bajo el encabezamiento: De la flexión de los resortes («Della piegatura delle molle»), se lee:

«Si se dobla un resorte recto, necesariamente la parte convexa se vuelve más delgada y la parte cóncava más gruesa (*che dalla parte del suo colmo ella si rarefichi, e dalla parte del cavo ella si condensi...*) Esta modificación sigue la regla piramidal<sup>8</sup> y por lo tanto en el centro del resorte no habrá nunca modificación.

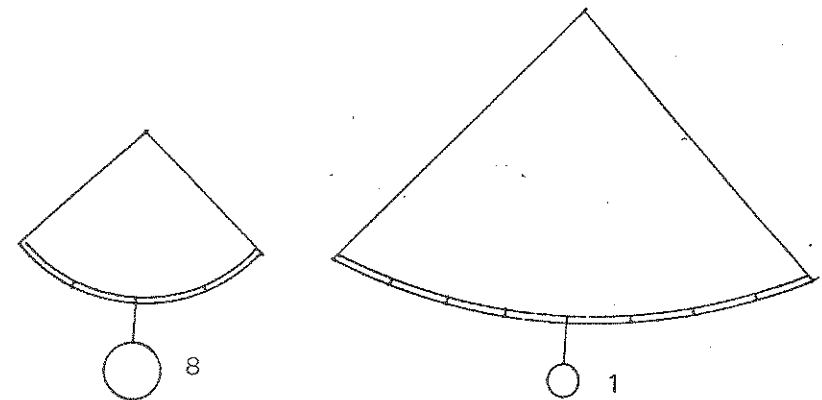


Figura 17

<sup>7</sup> Aunque no existe una datación precisa de las páginas del manuscrito, si tenemos conocimiento de las fechas en que probablemente fueron escritas: En efecto, en el estudio que Ladislao Reti hace para la edición de Taurus de 1974, Volumen III, 4 se establece una cronología que atribuye la segunda parte del Manuscrito a los años 1492-1493. El Manuscrito es anterior en gran parte al Códice Foster II2 (f. 64 a 159v) de 1495, que trata igualmente de Mecánica. La mayor parte del Madrilesno es de 1493 a 1495, siendo sus últimas anotaciones de 1497.

<sup>8</sup> Debe entenderse relación lineal, en este caso según el canto de la sección. En diversos lugares de sus manuscritos puede comprobarse esto. Por ejemplo, en el Códice de Madrid I. f. 85 r: se lee, acompañado de un pequeño dibujo:



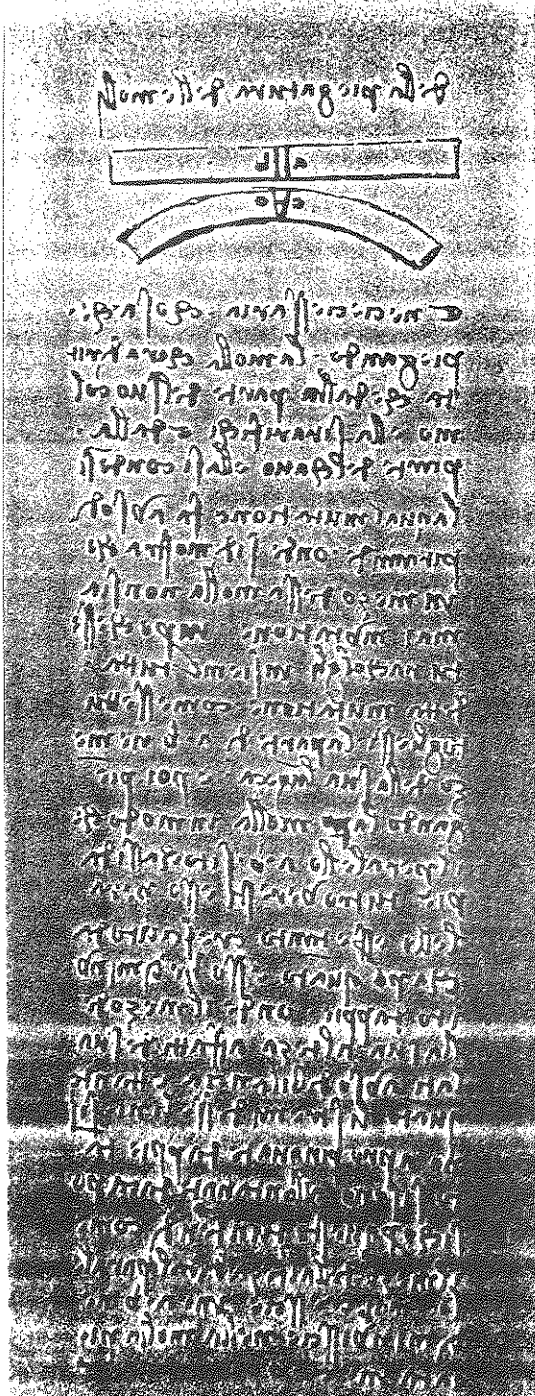


Figura 18

### Della piegatura delle molli

È necessaria cosa che,  
piegando la molla ch'era diritta,  
che dalla parte del suo colmo  
ella si rarifichi, e dalla parte  
del cavo ella si condensi.  
La qual mutazione fa a uso di  
piramide, onde si dimostra che  
in mezzo d'essa molla non si ha  
mai mutazione. Imperò che se  
tu raccogli insieme tutta  
detta mutazione, come se tu  
togliessi la parte di a b nel mezzo  
della sua lunghezza, e poi  
piegando la molla in modo che  
il parallelo a b si toccassi da  
piè, tu troveresti esso parallelo  
essere tanto cresciuto da capo,  
quanto esso è diminuito da piè.  
Onde il mezzo della sua altezza  
ha fatti de' sua lati a uso di  
bilancia. E tanto quanto li stremi  
d'esse linie si sono appropinquate  
da piè, tanto si sono allontanate  
da capo. Sì che per questo  
tu 'ntendi, come il mezzo  
dell'altezza di tal parallelo mai  
cresce in a b, né diminuisce  
nella molla piegata in c o.

Codice 1 del manoscritto

f. 89 v.

SILVIA CLUUS n.º 3  
DICIEMBRE 1987

Considerada la modificación en conjunto, resulta que si se toma la parte a b en el centro y se dobla el resorte de manera que las líneas paralelas a b se toquen por abajo, observarás que la distancia entre las líneas ha crecido tanto arriba cuanto ha disminuido abajo. Su centro, pues, se ha vuelto una especie de balanza, y tanto como los extremos de las líneas se hayan acercado abajo, tanto se habrán alejado arriba. Habrás pues entendido, que el centro de la altura de las líneas paralelas no crece ni en a b ni disminuye en el resorte doblado, en c o».

Puede observarse que se trata de un planteamiento prácticamente idéntico término por término al de Hooke en sus *Lectures...*, en las que concluye el enunciado de su ley diciendo:

«Es muy evidente que la Regla o Ley de la Naturaleza en todo cuerpo elástico es que la fuerza o potencia necesaria para restaurar la posición original es siempre proporcional a la distancia o espacio con que se le aparta de ella, sea por *Rarefacción* o por separación de sus partes una de la otra, sea por *Condensación*, o agrupamiento de dichas partes más juntas entre sí».

Hooke continua, y aporta una figura para la flexión que no deja de tener una clara semejanza con la de Leonardo (Fig. 19).

Ahora bien, concebir como hace Leonardo un modelo de deformación local no basta para poder describir la deformación global de la pieza (su descenso en un punto dado): conocer la deformación local supone conocer la curvatura local, mientras que obtener la deformación global exige integrar esta curvatura local a lo largo de toda la pieza: veremos que Leonardo llega a lograr tal integración, pero sólo después de ser capaz de plantear el problema pertinente.

En lo que sigue extractamos del Códice 1, p. 135 y ss. (Fig. 20)

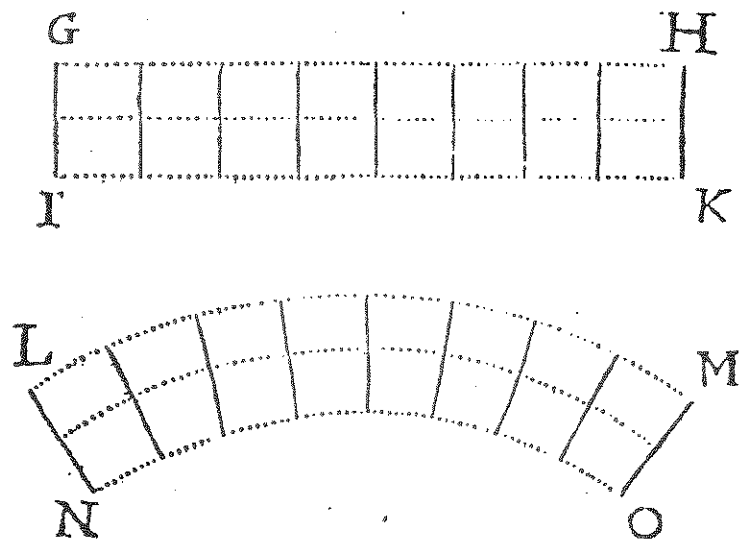
«n o tiene el doble de fuerza que m o por ser la mitad. Y la distancia a n, por haber aumentado en un subduple de su primitiva longitud, a m, adquiere también un subduple de debilidad. De ahí que al colgar el peso m en n, el brazo n o, por su naturaleza, debiera resistir a 8 al bajar hasta x. Pero la mitad de ese peso es suficiente para bajarlo al mismo punto si se suspende en m».

«Parece por tanto que si en el centro de la viga se forma una flecha de un codo con cuatro libras, al poner estas mismas libras en el cuarto de la viga, la viga formará una flecha exactamente de medio codo».

Esta es la forma de hacerse la primera pregunta sobre la deformación de la pieza. Como vemos, utiliza como mecanismo de razonamiento el principio de equilibrio de la palanca, asimilando en un primer momento la fuerza de la viga a la de los dos brazos en que se apoya el peso. Pero, siendo a la vez conocedor del principio de los desplazamientos, como ley que rige el comportamiento de la palanca, se ve tentado a aplicarlo, identificando así el desplazamiento utilizado en el análisis del equilibrio (virtual o infinitesimal según nuestras concepciones, pero finito según los geómetras, hasta la aportación de Descartes y otros) con el des-

«... la potencia de un resorte de este tipo disminuye en proporción piramidal, y por esta razón los maestros relojeros remedian la situación introduciendo una pirámide, como se ve en el dibujo de abajo».

Having thus explained the most simple way of springing in solid bodies, it will be very easy to explain the compound way of springing, that is, by flexure, supposing only two of these lines joyned



together as at G H I K, which being by any external power bended into the form L N N O, L M will be extended, and N O will be diminished in proportion to the flexure, and consequently the same proportions and Rules for its endeavour of rettoring it self will hold.

Figura 19

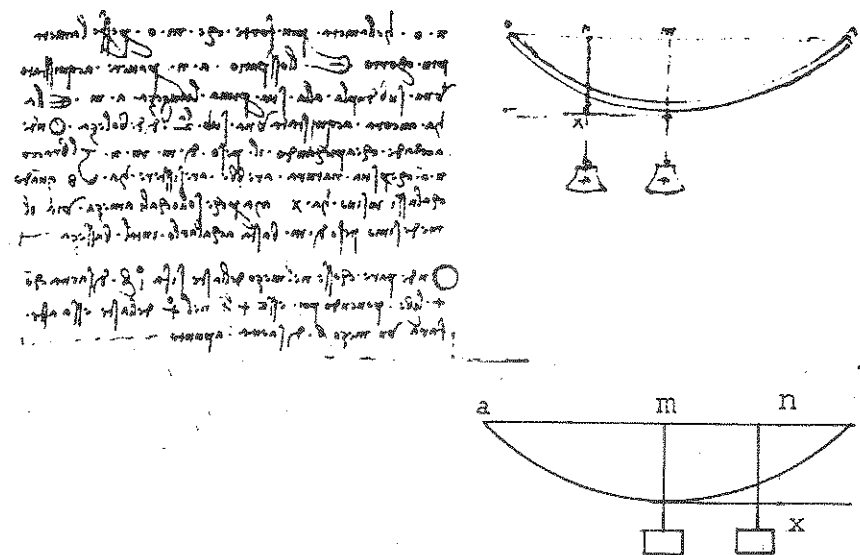


Figura 20

plazamiento real de la pieza bajo la carga. De este modo puede ligar *fuerza* de la viga (que coincide con la *fuerza* local del punto más desfavorable) con deformabilidad de la viga, no distinguiendo en un primer momento la deformación local de la deformación global de ésta (que no coinciden). Ello le permite interrogarse sobre las relaciones entre las magnitudes responsables de la deformación, suponiendo inicialmente todas las relaciones proporcionales, y le mueve a verificar por la vía experimental las reglas que describen este comportamiento. En efecto, el manuscrito muestra que dedica un tiempo a otras cuestiones, tiempo que le permite madurar el problema planteado, sobre el que vuelve más tarde, para darle una solución.

Para abordar dicha solución, Leonardo imagina una serie de problemas experimentales diversos (Fig. 21), hasta que consigue centrarse en un subconjunto clave de ellos. (Códice I f. 137, r.) (Fig. 22).

En los cinco problemas que se plantea, Leonardo abre una importante vía de análisis, que al parecer no fue recorrida abiertamente por nadie tras él.

En el primer problema replantea el anteriormente citado del folio 135 r. que, según todos los indicios, y de acuerdo con su vocación experimental, ha abordado teórica y experimentalmente<sup>9</sup>.

<sup>9</sup> En efecto, si observamos que, a la vista del planteamiento con que aborda el tercero de los problemas y de la solución que da a éste, los problemas primero y segundo son problemas inversos para los que no expone resultados concordantes, podemos afirmar que la solución a los mismos se ha abordado experimentalmente y que las dificultades de medida que encierra el segundo de ellos explica tal discordancia. En la esquina superior derecha del manuscrito se lee: «¡Experimentado!», Códice I, f. 137 r.

El primer problema trata de hallar la relación entre los pesos que producen igual curvatura cuando se los sitúa en puntos distintos de la viga. Cabe pensar que Leonardo interpreta ya curvatura por curvatura media, por aspecto de la curva completa, por curvatura del arco de círculo de igual flecha, sin que pueda afirmarse nada cierto sobre su grado de percepción de los distintos valores de la curvatura en los distintos puntos de la pieza.

Así, parece medir la curvatura por la flecha máxima, *jaun cuando no habla de flecha*, cuestión que deja para más adelante, *sino de curvatura*! De este modo queda clara la distinción entre ambos temas, de gran importancia teórica, y de la que Leonardo sabrá extraer importantes consecuencias.

El cuadro que sigue establece la comparación entre los valores a los que llega Leonardo (Cargas que producen igual curvatura) y dos valores comparativos, deducidos a través del análisis elástico actual, de cargas que producen igual *curvatura media*. Los primeros valores corresponden a las cargas que producen igual flecha máxima, los segundos a las cargas que producen idéntica curvatura media, todos ellos para las posiciones sobre la pieza que aparecen indicadas.

Posición (fracción de l)	2	4	8	16	32	64
Cargas según Leonardo	2	3	5	10	18	36
Cargas para igual flecha	2	2,86	5,33	10,46	20,80	41,50
Cargas igual curv. media	2	2,67	4,57	8,53	16,50	32,50

Puede observarse una importante precisión en los resultados a los que llega Leonardo.

En el cuadro siguiente se observan las diferencias respecto a las citadas cargas que producen igual flecha máxima e igual curvatura media  $C_m$ :

$$C_m = \frac{1}{L} \int \frac{M \, dx}{EI}$$

Dif. sobre igual flecha -	+ 5%	-6%	-4%	-13%	-13%
Dif. sobre igual $C_m$ -	+ 12%	+ 9%	+ 17%	+ 9%	+ 11%

Cabe explicar el diferente sentido del error correspondiente al primero de los números (+ 5% frente al resto negativo) por el intento de Leonardo de expresar sus resultados por medio de series de números naturales o de sus inversos, de modo que, ya llegase a las soluciones por deducción o por experimentación, la representación de éstas se realiza por series de números que expresan las leyes subyacentes, y al ser los naturales los más perfectos, son los elegidos para ello, aun cuando sus conocimientos de aritmética no le impiden en absoluto utilizar números compuestos (entero más fraccionario).

A la vista de los resultados se deduce que Leonardo ha replanteado el problema del f. 135, y sus resultados le han llevado a replantear las relaciones que allí había utilizado. Si allí la proporcionalidad se establecía entre fuerza o debilidad de la barra respecto a la carga (esfuerzo en la barra según nuestro vocabulario), y deformación (medida en términos de flecha máxima, de descenso, de deformación total), aquí la relación pasa a estar entre dicho esfuerzo y la curvatura

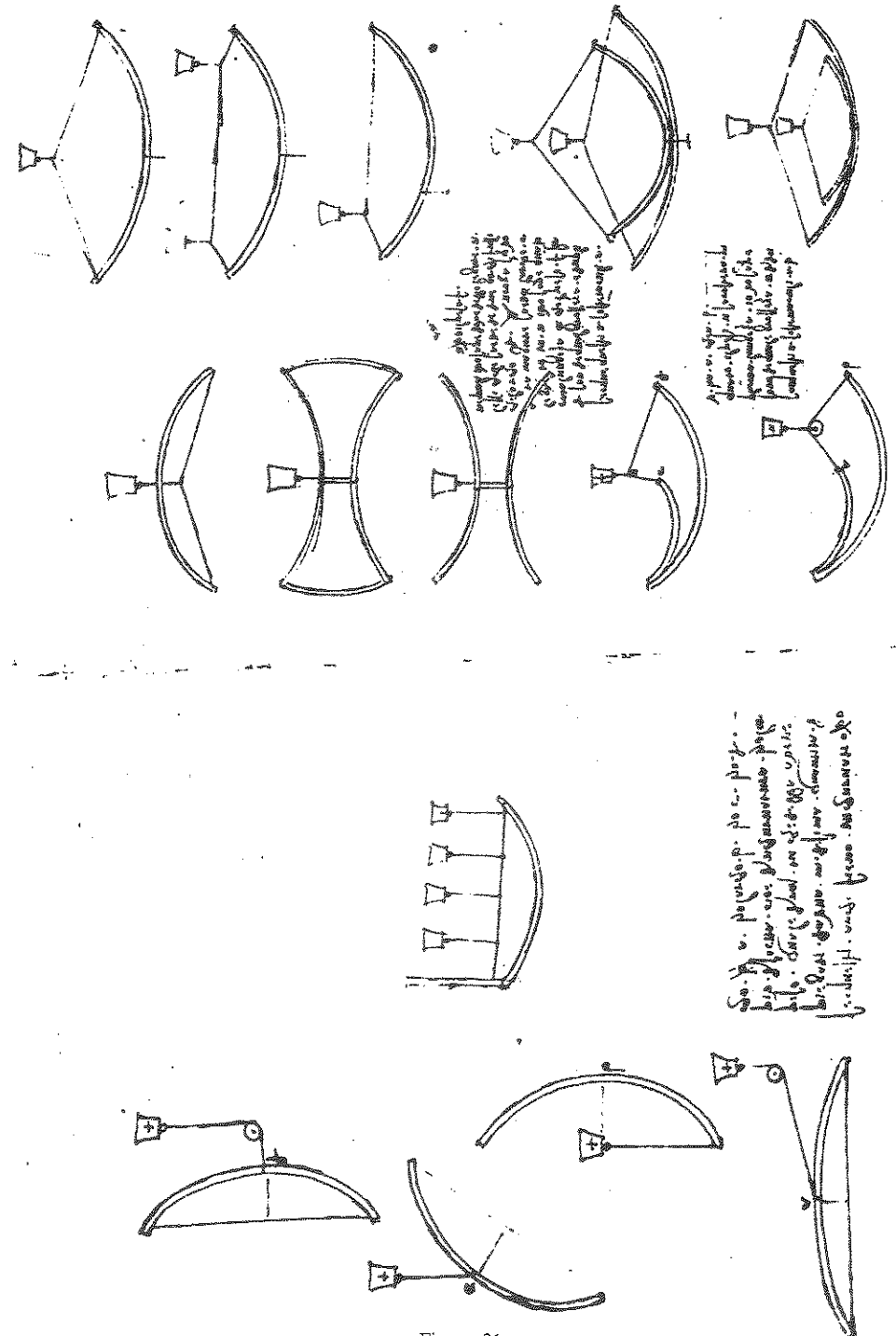


Figura 21

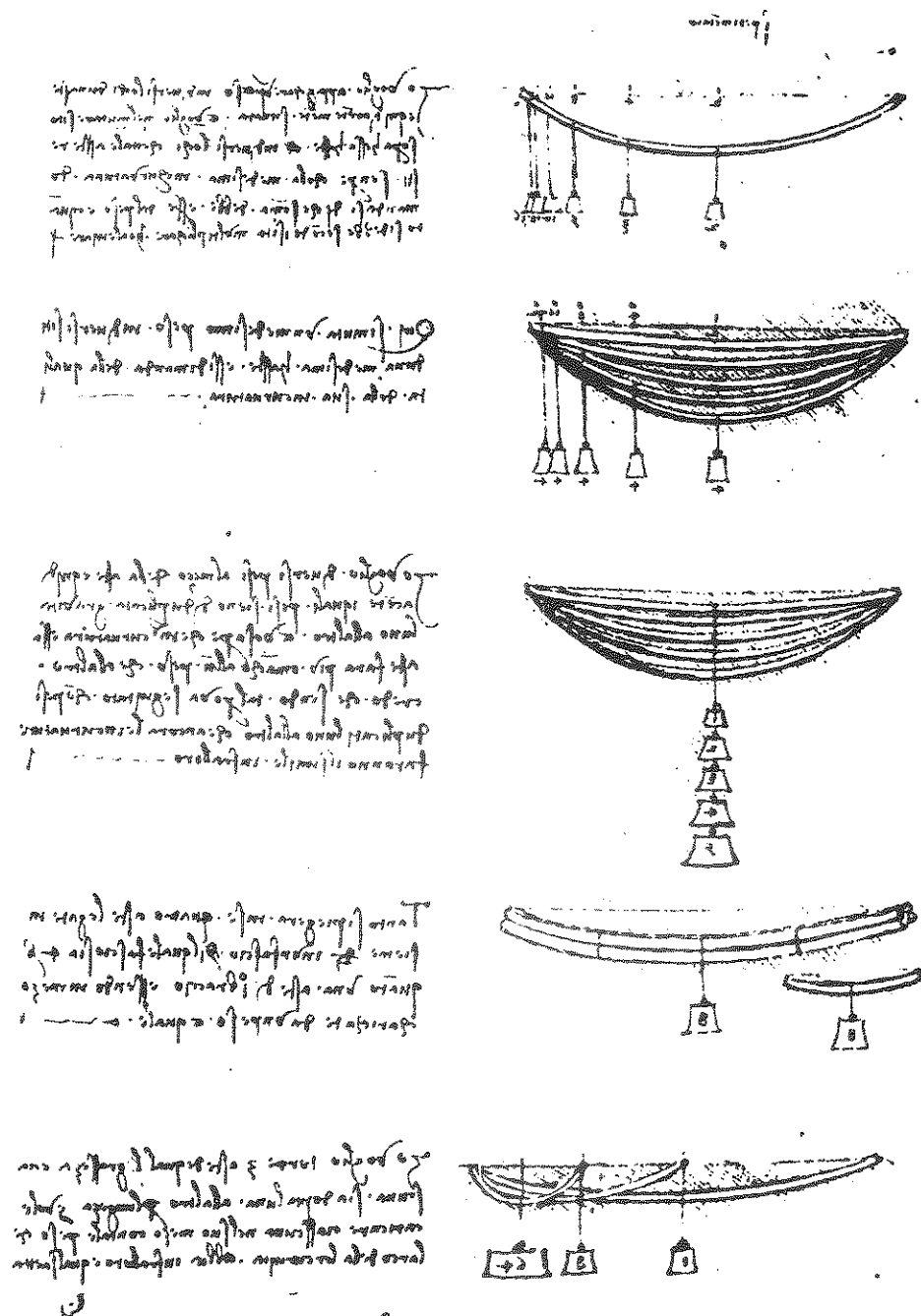


Figura 22

(o deformación local), relacionándose esta curvatura con el descenso total por las leyes de la geometría.

El segundo problema de la página plantea el problema inverso, a saber, cuál es la relación entre las curvaturas producidas por una misma carga situada en posiciones distintas sobre la viga.

Como sabemos hoy, en la fase elástica del comportamiento del material (o a partir de hipótesis que supongan la linealidad de la relación esfuerzo-deformación), la cadena de valores para este problema debería ser exactamente la inversa de la correspondiente al problema anterior. Sin embargo, Leonardo, pese a expresar la linealidad en el siguiente problema, da una sucesión que no se corresponde con la obtenida para el problema primero.

de	2	3	5	10	18	36	pasará a la serie
	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	...	mucho más alejada

de los resultados de la teoría elástica.

Todo indica que en este caso se han sumado a favor de esa serie, que decrece más rápidamente de lo que debería, tres efectos: En primer lugar la imprecisión creciente en la medición de las flechas según se acerca la carga al apoyo, habida cuenta de los medios de medida de que Leonardo podía disponer. En segundo lugar, las deformaciones locales (la curvatura) decrecen en la realidad más deprisa que las solicitaciones, si consideramos el comportamiento no lineal de la madera que pudo utilizar para el ensayo. En tercer lugar, y fundamentalmente, la idea de Leonardo de obtener leyes sencillas para la descripción de las leyes que subyacen a los fenómenos naturales, que en definitiva le impulsó a adoptar la secuencia verdaderamente sencilla de las potencias de 2.

En el tercer problema Leonardo plantea y da una solución al problema clave de la proporcionalidad, de la relación lineal entre acción y deformación, entre carga y curvatura. Para iguales condiciones de luz y sección, doble peso supone doble curvatura. De este modo Leonardo establece una relación numérica para un fenómeno cuya descripción cualitativa ya figura en el manuscrito f. 84 v., basado en una figura (*vide supra*, pág. 50) y una descripción totalmente correctas.

Leonardo trata pues el tema más de un siglo antes de la aparición de los *Discorsi...* de Galileo, y casi doscientos años antes de que Robert Hooke por un lado, y Mariotte por otro aborden nuevamente el problema de la deformación, si bien desde una perspectiva global nueva (la consideración del comportamiento de los más pequeños elementos constitutivos de la materia). Este diferente interés no impide que, como ya hemos visto, la formulación de Hooke sea casi idéntica a la realizada por Leonardo, aunque su desarrollo por Mariotte difiera: Mariotte realiza su trabajo a partir de la formulación precisa de Galileo.

Sin embargo son los dos últimos problemas los que muestran la fecundidad del tratamiento de Leonardo, así como la importancia de haber trabajado con curvaturas, y no con flechas como en el intento previo del f. 135.

En el cuarto afirma la igualdad de la curvatura entre cuatro vigas de cuatro codos y una de un codo cargadas («doblarán tanto», con un dibujo inequívoco):

La curvatura depende en la misma medida de la carga que de la luz, es decir, depende del momento. Hay que recordar aquí que la agrupación de piezas que hace Leonardo consiste en atar haces de piezas menores, como se ve en las figura del f. 135 r. del *Códice Atlántico*. Por ello es indiferente para él yuxtaponer en el sentido del ancho y en el del canto: la agrupación es yuxtaposición, pero no solidificación de las piezas.

Finalmente plantea el problema de hallar la misma flecha con distintas relaciones de carga y luz. La solución, correcta, es sorprendentemente precoz, y aparece igualmente, según hemos visto antes, en el manuscrito M de la Biblioteca del Instituto. La luz y la flecha se encuentran en relación cúbica: En efecto, y puesto que por los resultados del problema 3 las cargas y las flechas están en relación lineal, el aumento cúbico de la carga preciso para mantener la flecha al reducir la luz exige que la flecha dependa del cubo de la luz. Leonardo da, pues, los tres pasos: Esfuerzo-Curvatura (o radio de giro) que depende en igual medida de la carga que de la luz; Curvatura-Ángulo del arco (proporcional a la longitud del arco o longitud de la barra, ángulo al que hoy denominamos giro relativo entre los extremos de la pieza), y finalmente Ángulo-Flecha.

De este modo Leonardo abre una fecunda vía de exploración del problema de la flexión, postulando la linealidad con dos siglos de antelación, y delimitando con precisión los términos del problema y sus relaciones mutuas. Es verdaderamente lamentable que la historia de los manuscritos de Madrid impidiese que éstos estuviesen al alcance de investigadores que habrían podido hacer uso inteligente de los mismos<sup>10</sup>.

## Epílogo

Tras los importantes trabajos de Ravaisson-Mollien al publicar los manuscritos acompañados de una historia de los mismos, y de P. Duhem, al establecer los paralelismos entre la obra de Leonardo y la de autores posteriores, sabemos que al menos gran parte de los manuscritos de Leonardo fueron ampliamente conocidos en su época (incluso plagiados). Como dice P. Duhem 1905, Vol. II p. 282: «por la tradición oral que había nacido durante su vida, por la dispersión

<sup>10</sup> Ver historia de los códices de Madrid en el estudio que Ladislao Retti incorpora a la edición facsímil de 1974: Según parece, tales códices proceden de la colección de escritos y carpetas con que se hizo Pompeo Leoni (que fue escultor de Felipe II entre 1582-1590) y que trajo a España (Pompeo los conservaba al morir en 1609). Estos pasaron a Gian Battista Leoni, que ofreció su venta al Duque Cosimo II de Médicis. En 1614 el «experto» Giovanni Franceso Cantagallina dio un informe desfavorable al agente del Duque, Giovanni Altoritti, por lo que la venta no se llevó a cabo. En 1623 pretende su compra el Príncipe de Gales, no siendo atendida su petición. Hay noticias de que en 1628 la colección se hallaba en poder de Juan de Espina, que los legó al Rey de España en 1639, pasando a palacio a su muerte en 1642. Desde entonces permanecen en la Biblioteca de Palacio, hasta que en 1830 pasan a la Biblioteca Nacional, siendo publicados en edición facsímil sólo en 1974.

De este modo fracasa por dos veces la posibilidad de acceso de los manuscritos por los científicos más relevantes: Galileo o la Royal Society habrían tenido en caso contrario acceso temprano a esta obra.

de sus manuscritos tras su muerte, sus pensamientos fueron lanzados a los cuatro vientos del cielo, y algunos encontraron terreno propicio para su desarrollo». El código de Madrid no se encuentra, sin embargo, entre éstos: Así como el problema de la rotura de la ménsula tiene una solución sistemática aportada por Galileo 100 años después, la flexión (la deformación) de la viga cargada tendrá que esperar para ser abordado más de 200 años, y lo será a partir de premisas nuevas.

## Bibliografía

- BÉLIDOR, B.F. (1729), *La science des ingénieurs dans la conduite des travaux de fortification et d'Architecture civile*, París.
- CERVERA, Jaime (1982), *Cálculo de Estructuras y Resistencia de Materiales: Origen y Desarrollo Histórico de los Conceptos utilizados*. Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Madrid. (no publicada).
- DUHEM, Pierre (1905), *Origines de la Statique*. París.
- DUHEM, Pierre (1906, 1909, 1913), *Études sur Leonardo da Vinci: ceux qu'il a lu et ceux qui l'ont lu*. París.
- GALILEI, Galileo (1638), *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*. Leyden, Ezelvirii.
- HOOKE, Robert (1678), *Lectures de potentia restitutiva*. Londres.
- DA VINCI, Leonardo, *Codex Matritensis, I*, Tratado de estática y Mecánica. Ed. facs. Madrid, Taurus, 1974.
- *Códice Atlántico*. Ed. facs. Florencia 1975.
- *Manuscritos de la Biblioteca del Instituto*. Ed. Facs. por Ravaisson Mollien, París, 1881.
- MARIOTTE, E. (1686), *Traité du mouvement des eaux et des autres corps fluides*. París.
- ZAMATTIO, Carlo (1980), en *Leonardo Scienciatto*, Florencia, Giunti Barbèra & Mc Graw-Hill.